Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XX-a, Braşov, 17 mai 2019

Clasa a VII-a

1. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c, d şi k. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+kb} + \frac{bc}{b+kc} + \frac{cd}{c+kd} + \frac{da}{d+ka} \le \frac{a+b+c+d}{k+1}.$$

Traian Tămâian

2. Arătaţi că fracţia $\dfrac{(n^2+1)^{2k+1}+n^{2k+4}}{(n+1)^{2k+1}+n^{k+2}}$ este reductibilă pentru orice numere naturale k şi n.

Ionel Tudor

3. Fie un $ABCD$ un trapez dreptunghic, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90°$. Notăm cu E simetricul lui B faţă de C şi cu F punctul situat pe dreapta CD astfel încât $CF = BC$, unde $C \in (DF)$. Ştiind că punctele A, D şi E sunt coliniare, demonstraţi că $HK = BE$, unde H este ortocentrul triunghiului AEF, iar K este ortocentrul triunghiului ABF.

Cătălin Cristea

4. Considerăm un patrulater convex $ABCD$, cu diagonalele $AC = BD = 2$ şi perimetrul $2(1+\sqrt{3})$. Determinaţi aria maximă a unui astfel de patrulater.

Vasile Pop

Concursul naţional de matematică ”Laurenţiu Duican”
Ediţia a XX-a, Braşov, 17 mai 2019

Clasa a VIII-a

1. Considerăm dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 32$ cm şi $BC = 24$ cm. Punctul M se află pe latura AD astfel încât $AM = 4$ cm şi notăm cu N centrul cercului circumscris triunghiului BMD. Dacă punctul P aparţine perpendicularei dusă în B pe planul ABC astfel încât $BP = 39$ cm, demonstraţi că $\big(\widehat{(PMN),(ABC)}\big) \equiv \big(\widehat{(PMN),(PBC)}\big)$.

Dorina Rapcea

2. Spunem că perechea de numere reale nenule (a, b) este *interesantă* dacă $a + b$ şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ sunt numere întregi nenule.

(a) Arătaţi că există o infinitate de *perechi interesante*.

(b) Determinaţi *perechile interesante* (a, b) cu proprietatea că cel puţin unul dintre numerele a^2 şi b^2 este raţional.

Aurel Bârsan

3. Fie $ABCD$ un tetraedru şi punctele E, F, G, H, I, J pe laturile AB, BC, CA, CD, AD respectiv DB astfel ca

$$AE \cdot EB = BF \cdot FC = CG \cdot GA = CH \cdot HD = DI \cdot IA = DJ \cdot JB.$$

Arătaţi că punctele E, F, G, H, I, J se află pe o sferă.

Vasile Pop

4. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $ab + bc + ca = 1$. Demonstraţi că

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 63a^2b^2c^2.$$

Cătălin Cristea

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XX-a, Braşov, 17 mai 2019

Clasa a IX-a

1. Se consideră ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi $|a + c| < |b|$.
a) Demonstraţi că ecuaţia are soluţii reale şi distincte.
b) Determinaţi numărul c ştiind că ecuaţia are soluţiile întregi.

Aurel Bârsan

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea

$$f(x + y) + f(x - y) = 2[f(x) + f(y)],$$

pentru orice numere reale x şi y. Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n şi pentru orice numere reale $x_1, x_2, ..., x_n$ există numerele $a_1, ..., a_n \in \{-1, 1\}$ pentru care

$$f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n) \leq f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n).$$

Nicolae Bourbăcuţ

3. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care primele k zecimale din reprezentarea zecimală a lui $\sqrt{n}$ sunt numerele $a_1, a_2, \cdots, a_k$, în această ordine.

Mihály Bencze

4. Fie $[A_1 A_2 ... A_n]$ un poligon înscris în cercul de centru O şi rază R, G centrul său de greutate şi B_i a doua intersecţie a dreptei $A_i G$ cu cercul, $i = \overline{1, n}$. Să se arate că:
a) $\sum_{i=1}^{n} GA_i^2 = n(R^2 - OG^2)$;
b) $\sum_{i=1}^{n} GA_i \leq \sum_{i=1}^{n} GB_i$.
(G este definit prin relaţia $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$).

Vasile Pop

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XX-a, Braşov, 17 mai 2019

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$2019^{\sin^2 x\left(1+\cos^2 x\right)} - 2019^{\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)} = 2018 \cdot \cos 2x.$$

Traian Tămâian

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi z_1, z_2, ..., z_n numere complexe, distincte două câte două, cu $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$. Dacă $|z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n| = n$, să se calculeze $|z_1 + z_2 + ... + z_n|$.

Aurel Bârsan

3. Să se determine numărul tripletelor $(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ pentru care

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}.$$

Vasile Pop

4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că imaginea oricărui interval închis I este un interval închis J iar raportul dintre lungimea lui J şi lungimea lui I este o constantă $a > 0$.

Vasile Pop

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XX-a, Braşov, 17 mai 2019

Clasa a XI-a

1. Fie k un număr întreg nenul. Considerăm o matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ având proprietăţile

$$\det(A) = k^2, \quad \det(A^2 - k \cdot A + k^2 \cdot I_3) = 0.$$

a) Arătaţi că numărul $n = 2 \cdot \det(A + I_3) + 2019 \cdot \det(A - I3) - 3$ este un întreg pătrat perfect.
b) Arătaţi că există $A \in M_3(\mathbb{Z})$ cu proprietăţile din enunţ.

Traian Tămâian

2. Fie matricele $A \in M_m(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ şi funcţia

$$f : M_{m,n}(\mathbb{C}) \to M_{m,n}(\mathbb{C}), \quad f(X) = A \cdot X - X \cdot B.$$

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) Funcţia f este injectivă.
b) Funcţia f este surjectivă.
c) Matricele A şi B nu au nicio valoare proprie comună.

Vasile Pop

3. Considerăm p numere naturale $a_1, a_2, \cdots, a_p$, unde $p \geq 2$. Arătaţi că mulţimea

$$\left\{ n \in \mathbb{N} | \sqrt[p]{(n + a_1)(n + a_2) \cdots (n + a_p)} \in \mathbb{N} \right\}$$

este infinită dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_p$.

Nicolae Bourbăcuţ

4. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.
a) Demonstraţi că dacă nu există $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ atunci f are cel puţin un punct de extrem local în fiecare din intervalele (a, ∞), cu $a \geq 0$.
b) Este adevărată reciproca proprietăţii de la a)?

Dorel Miheţ

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XX-a, Braşov, 17 mai 2019

Clasa a XII-a

1. Pe mulţimea $G = (0, \infty)$ se defineşte operaţia "$\circ$" în descrisă de relaţia:

$$a^x + a^{x \circ y} + a^y = 2 + a^{x+y}, \text{ pentru orice } x, y \in G,$$

unde $a > 1$.

a) Demonstraţi că $(G, \circ)$ este un grup abelian.

b) Fie $x_k \in G,\ k = 1, 2, \ldots, n$. Arătaţi că

$$\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{a^{x_i \circ x_j} - 1} \leq \frac{n-1}{2} \sum_{k=1}^{n} a^{x_k}.$$

Mihàily Bencze

2. Fie $(A, +, \cdot)$ inel cu unitate. Dacă mulţimea $N = \{x \in A |\ xy \neq 0, \forall y \in A^\star\}$ este finită, demonstraţi că $(N, \cdot)$ este grup. (Notaţie: $A^\star = A \setminus \{0\}$.)

Nicolae Bourbăcuţ

3. Calculaţi

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{n^6 + k^3} \cdot \cos \frac{2k\pi}{n}.$$

Traian Tămâian

4. Fie a un număr real strict pozitiv.

a) Determinaţi funcţiile $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$, integrabile pe intervalele compacte incluse în $[0, \infty)$, care satisfac relaţia

$$\int_0^x f(t)\, dt + 1 = \frac{1}{f^a(x)}, \text{ pentru oricare } x \geq 0.$$

b) Demonstraţi că pentru oricare număr natural nenul n are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{1}{a+1}}} > \frac{a+1}{a} \left((n+1)^{\frac{a}{a+1}} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{a+1}}} \right).$$

Eugen Păltănea