Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ediţia a XX-a, Braşov 2019

Clasa a VII-a - Soluţii şi Bareme

VII 1. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c, d şi k. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+kb}+\frac{bc}{b+kc}+\frac{cd}{c+kd}+\frac{da}{d+ka}\leq\frac{a+b+c+d}{k+1}.$$

Traian Tămâian

Soluţie.
Pentru oricare $x, y > 0$, are loc inegalitatea $\dfrac{xy}{x+ky}\leq\dfrac{y+kx}{(k+1)^2}$. (1)
Astfel, avem:

$$\frac{xy}{x+ky}\leq\frac{y+kx}{(k+1)^2}\Leftrightarrow(x+ky)(y+kx)\geq xy(k+1)^2\ \Leftrightarrow\ k(x-y)^2\geq 0.$$

.... **5 puncte**
Din inegalitatea (1) rezultă:

$$\frac{ab}{a+kb}+\frac{bc}{b+kc}+\frac{cd}{c+kd}+\frac{da}{d+ka}\leq\frac{b+ka}{(k+1)^2}+\frac{c+kb}{(k+1)^2}+\frac{d+kc}{(k+1)^2}+\frac{a+kd}{(k+1)^2}=\frac{a+b+c+d}{k+1},$$

ceea ce trebuia demonstrat. .... **2 puncte**

VII 2. Arătaţi că fracţia $\dfrac{(n^2+1)^{2k+1}+n^{2k+4}}{(n+1)^{2k+1}+n^{k+2}}$ este reductibilă pentru orice numere naturale k şi n.

Ionel Tudor

Soluţie.
Fie $n\in\mathbb{N}$.
Pentru $k=0$, avem $\dfrac{n^4+n^2+1}{n^2+n+1}=\dfrac{n^4+2n^2+1-n^2}{n^2+n+1}=\dfrac{(n^2+1)^2-n^2}{n^2+n+1}=\dfrac{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}{n^2+n+1}$,
deci fracţia se poate simplifica prin $n^2+n+1>1$. .... **1 punct**
Pentru $k\in\mathbb{N}^*$, arătăm că fracţia se poate simplifica de asemenea cu n^2+n+1. Vom aplica proprietatea $(a+b)^m=\mathcal{M}a+b^m$, pentru orice numere întregi a şi b şi orice număr natural nenul m, unde $\mathcal{M}a$ desemnează un multiplu al numărului a. Astfel, avem:
$(n^2+1)^{2k+1}+n^{2k+4}=\left[\left(n^2+n+1\right)+(-n)\right]^{2k+1}+n^{2k+4}=\mathcal{M}(n^2+n+1)+(-n)^{2k+1}+n^{2k+4}=$
$=\mathcal{M}(n^2+n+1)+n^{2k+1}(n-1)(n^2+n+1)=\mathcal{M}(n^2+n+1)$. .... **3 puncte**
$(n+1)^{2k+1}+n^{k+2}=(n+1)(n+1)^{2k}+n^{k+2}=(n+1)\left[\left(n^2+n+1\right)+n\right]^k+n^{k+2}=$
$=\mathcal{M}(n^2+n+1)+(n+1)n^k+n^{k+2}=\mathcal{M}(n^2+n+1)+(n^2+n+1)n^k=\mathcal{M}(n^2+n+1)$.
. ... **3 puncte**

VII 3. Fie un $ABCD$ un trapez dreptunghic, cu $AB\parallel CD$, $AB>CD$ şi $m(\widehat{A})=m(\widehat{D})=90°$. Notăm cu E simetricul lui B faţă de C şi cu F punctul situat pe dreapta CD astfel încât $CF=BC$, unde $C\in(DF)$. Ştiind că punctele A, D şi E sunt coliniare, demonstraţi că $HK=BE$, unde H este ortocentrul triunghiului AEF, iar K este ortocentrul triunghiului ABF.

Cătălin Cristea

Soluţie.
$FK\perp AB$, deoarece K este ortocentrul triunghiului ABF, iar $H\in FD$, deoarece H este ortocentrul triunghiului AEF. Cum $AB\parallel CD$, obţinem $FK\perp CD$, deci $m(\widehat{KFH})=m(\widehat{EAB})=90°$. (1)
. ... **2 puncte**

Din $BC = CF = CE$ rezultă că triunghiul BFE este dreptunghic în F, deci $BF \perp EF$. Dar $AH \perp EF$, deoarece H este ortocentrul triunghiului AEF. Atunci $AH \parallel BF$ şi cum $AB \parallel HF$ rezultă că patrulaterul $ABFH$ este paralelogram. Obţinem $AB = FH$. (2) .... **2 puncte**
Deoarece K este ortocentrul triunghiului ABF, avem $AK \perp FB$. Cum $EF \perp FB$, rezultă $AK \parallel EF$. Punctele A, D şi E sunt coliniare, conform ipotezei. Atunci $AE \parallel FK$. Rezultă că patrulaterul $AEFK$ este paralelogram, deci $AE = FK$. (3) .... **2 puncte**
Din relaţiile (1), (2), şi (3) rezultă că $\Delta ABE \equiv \Delta FHK$ (cazul CC), de unde $HK = BE$. .... **1 punct**

VII 4. Considerăm un patrulater convex $ABCD$, cu diagonalele $AC = BD = 2$ şi perimetrul $2(1+\sqrt{3})$. Determinaţi aria maximă a unui astfel de patrulater.

Vasile Pop

Soluţie.
Fie M, N, P şi Q mijloacele laturilor AB, BC, CD şi respectiv DA. $MNPQ$ este paralelogram, cu laturile paralele cu diagonalele AC şi respectiv BD, astfel ca $MN = PQ = \frac{1}{2}AC = 1$, şi $NP = QM = \frac{1}{2}BD = 1$. Rezultă că $MNPQ$ este romb. Atunci $S(MNPQ) = \frac{1}{2}MP \cdot NQ$.
Dar $S(MNPQ) = S(ABCD) - \sum S(AMQ) = S(ABCD) - \frac{1}{4}\sum S(ABD) = \frac{1}{2}\sum S(ABCD)$.
Rezultă $S(ABCD) = MP \cdot NQ$. .... **3 puncte**
Fie E mijocul diagonalei AC. Avem $NQ \leq NE + QE = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Analog, $MP \leq \frac{1}{2}(AD + BC)$.
.... **1 punct**
Rezultă $S(ABCD) \leq \frac{1}{4}(AB+CD)(AD+BC)$, cu egalitate dacă $AB \parallel NQ \parallel CD$ şi $AD \parallel MP \parallel BC$, deci dacă $ABCD$ este dreptunghi (paralelogram cu diagonale egale). .... **1 punct**
Prin urmare, patrulaterul $ABCD$ are aria maximă dacă este un dreptunghi, cu $AB + BC = 1 + \sqrt{3}$ şi $AB^2 + BC^2 = 4$. Atunci $|AB - BC| = \sqrt{(AB - BC)^2} = \sqrt{2\left(AB^2 + BC^2\right) - (AB + BC)^2} = \sqrt{3} - 1$.
Obţinem $AB = \sqrt{3}$ şi $BC = 1$, dacă $AB > BC$, respectiv $AB = 1$ şi $BC = \sqrt{3}$, dacă $AB < BC$.
Astfel, aria maximă a unui patrulater $ABCD$ cu proprietăţile din enunţ este $\sqrt{3}$. .... **2 puncte**

Clasa a VIII-a - Soluţii şi Bareme

VIII 1. Considerăm dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 32$ cm şi $BC = 24$ cm. Punctul M se află pe latura AD astfel încât $AM = 4$ cm şi notăm cu N centrul cercului circumscris triunghiului BMD. Dacă punctul P aparţine perpendicularei dusă în B pe planul ABC astfel încât $BP = 39$ cm, demonstraţi că $\big(\widehat{(PMN),(ABC)}\big) \equiv \big(\widehat{(PMN),(PBC)}\big)$.

Dorina Rapcea

Soluţie.
Fie $\alpha = m(\widehat{(PMN),(ABC)})$ şi $\beta = m(\widehat{(PMN),(PBC)})$.
$BM = 4\sqrt{65}$ cm, $BD = 40$ cm, $\mathcal{A}_{BMD} = 320$ cm^2, $NM = NB = \frac{DM \cdot MB \cdot BD}{4\mathcal{A}_{BMD}} = \frac{5\sqrt{65}}{2}$ cm,
$\mathcal{A}_{BMN} = 195$ cm^2 .... **2 puncte**
Fie $E \in BC$, astfel ca $ME \perp BC$, respectiv $F \in BC$, astfel ca $NF \perp BC$. Obţinem $ME \perp (PBC)$ şi $NF \perp (PBC)$. .... **1 punct**
$\mathcal{A}_{PEF} = 195$ cm^2 .... **2 puncte**
$\mathcal{A}_{BMN} = \mathcal{A}_{PMN} \cos\alpha$, $\mathcal{A}_{PEF} = \mathcal{A}_{PMN} \cos\beta$ şi $\mathcal{A}_{BMN} = \mathcal{A}_{PEF}$ implică $\alpha = \beta$. .... **2 puncte**

VIII 2. Spunem că perechea de numere reale nenule (a, b) este *interesantă* dacă $a + b$ şi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ sunt numere întregi nenule.

1. Arătaţi că există o infinitate de *perechi interesante*.
2. Determinaţi *perechile interesante* (a, b) cu proprietatea că cel puţin unul dintre numerele a^2 şi b^2 este raţional.

Aurel Bârsan

Soluţie.

(a) De exemplu, mulţimea

$$\left\{ \left(\frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}, \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} \right) \mid k \in \mathbb{N},\ k \geq 2 \right\},$$

reprezintă o familie infinită de *perechi interesante*. .... **2 puncte**

(b) Fie (a, b) o *pereche interesantă*, astfel ca $a^2 \in \mathbb{Q}^*$ sau $b^2 \in \mathbb{Q}^*$. Avem $ab = (a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)^{-1} \in \mathbb{Q}^*$.
Cum unul dintre numerele a^2 şi b^2 este raţional, rezultă $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$. .... **1 punct**
Avem $2 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = (a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \in \mathbb{Z}^*$. .... **1 punct**
Notăm $k = \dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\}$ şi $t = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$. Obţinem $t^2 - kt + 1 = 0$. Ecuaţia $x^2 - kx + 1 = 0$ are soluţii raţionale dacă şi numai dacă $k^2 - 4$ este un pătrat perfect, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $k^2 - 4 = m^2$. Atunci $(k - m)(k + m) = 4$, de unde obţinem $k = \pm 2$. Cazul $k = -2$ se exclude. Pentru $k = 2$, obţinem $t = \dfrac{a}{b} = 1$, deci $a = b$.
Rezultă $2a = a + b =: n \in \mathbb{Z}^*$. Atunci $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \in \mathbb{Z}^*$, de unde $n \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.
În concluzie, *perechile interesante* cu propietatea din enunţ sunt următoarele:
$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(2, 2)$, $(-2, -2)$. .... **3 puncte**

VIII 3. Fie $ABCD$ un tetraedru şi punctele E, F, G, H, I, J pe laturile AB, BC, CA, CD, AD respectiv DB astfel ca

$$AE \cdot EB = BF \cdot FC = CG \cdot GA = CH \cdot HD = DI \cdot IA = DJ \cdot JB.$$

Arătaţi că punctele E, F, G, H, I, J se află pe o sferă.

Vasile Pop

Soluţie.
Fie O centrul sferei circumscrise tetraedrului şi R raza ei. Construim un plan care trece prin A, B şi O. Acest plan taie sfera după un cerc mare (de rază R). Puterea punctului E faţă de cercul de intersecţie este $AE \cdot EB = R^2 - OE^2$. .... **4 puncte**
Analog, obţinem $BF \cdot FC = R^2 - OF^2$, $CG \cdot GA = R^2 - OG^2$, $CH \cdot HD = R^2 - OH^2$, $DI \cdot IA = R^2 - OI^2$ şi $DJ \cdot JB = R^2 - OJ^2$. Atunci, pe baza ipotezei, obţinem $OE = OF = OG = OH = OI = OJ$, deci punctele se află pe o sferă de centru O. .... **3 puncte**

VIII 4. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $ab + bc + ca = 1$. Demonstraţi că

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 63a^2b^2c^2.$$

Cătălin Cristea

Soluţie.
Deoarece $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, e suficient să demonstrăm inegalitatea
$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 63a^2b^2c^2$. (1) .... **2 puncte**
Inegalitatea (1) este echivalentă cu $a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 64a^2b^2c^2$, deci echivalentă cu $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 64a^2b^2c^2$. (2) .... **1 punct**
Pe baza ipotezei, avem $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) = (a^2+ab+bc+ca)(b^2+ab+bc+ca)(c^2+ab+bc+ca) =$
$= (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$. .... **2 puncte**
Cum numerele a, b, c sunt pozitive, obţinem $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq (4ab)(4bc)(4ca) = 64a^2b^2c^2$, deci inegalitatea (2) este demonstrată. .... **2 puncte**
Remarcă: Egalitatea are loc pentru $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ediţia a XX-a, Braşov 2019

Clasa a IX-a - Soluţii şi Bareme

IX 1. Se consideră ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi $|a + c| < |b|$.
a) Demonstraţi că ecuaţia are soluţii reale şi distincte.
b) Determinaţi numărul c ştiind că ecuaţia are soluţiile întregi.

Aurel Bârsan

Soluţie.
a) $|a + c| < |b| \Leftrightarrow (a + c)^2 < b^2 \Leftrightarrow (a - c)^2 < \Delta$, deci $\Delta > 0$. .... **2 puncte**
b) $|a + c| < |b| \Leftrightarrow \left|1 + \frac{c}{a}\right| < \left|\frac{b}{a}\right| \Leftrightarrow (1 + x_1x_2)^2 < (x_1 + x_2)^2 \Leftrightarrow \left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right) < 0$ ..... **3 puncte**
Cum $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ şi nu pot fi ambele nenule, rezultă că $x_1x_2 = 0$, de unde $c = 0$. .... **2 puncte**
Soluţie alternativă
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.
a) $|a + c| < |b| \Leftrightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow f \Leftrightarrow$ f are ambele rădăcini reale, distincte. .... **2 puncte**
b) Cum f are o singură rădăcină în intervalul $(-1, 1)$ şi ambele rădăcini sunt numere întregi, rezultă că $f(0) = 0$, deci $c = 0$. .... **5 puncte**

IX 2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea

$$f(x + y) + f(x - y) = 2[f(x) + f(y)],$$

pentru orice numere reale x şi y. Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n şi pentru orice numere reale $x_1, x_2, ..., x_n$ există numerele $a_1, ..., a_n \in \{-1, 1\}$ pentru care

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n) \leq f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n).$$

Nicolae Bourbăcuţ

Soluţie.
Vom proba afirmaţia prin inducţie matematică după n. Pentru $n = 1$ cerinţa este evidentă. Pentru $n = 2$, deducem $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$ sau $f(x_1 - x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (pe baza ipotezei, prin reducere la absurd), deci afirmaţia este adevărată pentru $n = 2$. ... **2 puncte**
Admitem că afirmaţia este adevărată pentru un număr k şi arătăm că este adevărată pentru $k+1$. Fie $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ numere reale. Cum afirmaţia este adevărată pentru k, există $b_2, ..., b_{k+1} \in \{-1, 1\}$ astfel ca $f(b_2x_2 + ... + b_{k+1}x_{k+1}) \leq f(x_2) + ... + f(x_{k+1})$. (1)
Pe de altă parte, pentru x_1 şi $b_2x_2 + ... + b_{k+1}x_{k+1}$, există $a, b \in \{-1, 1\}$ astfel ca
$f(ax_1 + b(b_2x_2 + ... + b_{k+1}x_{k+1})) \leq f(x_1) + f(b_2x_2 + ... + b_{k+1}x_{k+1})$. (2)
Din (1) şi (2), alegând $a_1 = a$ şi $a_i = b \cdot b_i$, pentru $i = \overline{2, k+1}$, deducem $f\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_ix_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.
Astfel, afirmaţia este adevărată pentru $k + 1$ numere. Conform principiului inducţiei matematice, concluzia este adevărată. .... **5 puncte**

IX 3. Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale n pentru care primele k zecimale din reprezentarea zecimală a lui $\sqrt{n}$ sunt numerele $a_1, a_2, \cdots, a_k$, în această ordine.

Mihály Bencze

Soluţie.
Notăm $a = \overline{0, a_1a_2...a_k}$. Fie $p \in \mathbb{N}$.
Presupunem că un număr natural n are proprietăţile $[\sqrt{n}] = p$ şi $\{\sqrt{n}\} = \overline{0, a_1a_2 \cdots a_k \cdots}$.
Echivalent, $p + a \leq \sqrt{n} < p + a + 10^{-k}$, sau $(p + a)^2 \leq n < \left(p + a + 10^{-k}\right)^2$. .... **3 puncte**
Existenţa a cel puţin unui număr natural n cu proprietăţile indicate anterior este asigurată de condiţia

$\left(p+a+10^{-k}\right)^2-(p+a)^2 \geq 1$, echivalentă cu $p \geq \frac{10^k-2a-10^{-k}}{2}$. .... **2 puncte**
Astfel, pentru oricare $p \in \mathbb{N},\ p \geq \frac{10^k-2a-10^{-k}}{2}$, există (cel puţin) un număr natural n_p pentru care $\sqrt{n_p} = p + \overline{0,a_1a_2\cdots a_k\cdots}$. Deoarece $n_p < (p+1)^2 \leq n_{p+1},\ \forall\ p \in \mathbb{N},\ p \geq \frac{10^k-2a-10^{-k}}{2}$, rezultă că există o infinitate de numere naturale cu proprietatea din enunţ. .... **2 puncte**

IX 4. Fie $[A_1A_2...A_n]$ un poligon înscris în cercul de centru O şi rază R, G centrul său de greutate şi B_i a doua intersecţie a dreptei A_iG cu cercul, $i=\overline{1,n}$. Să se arate că:
a) $\sum_{i=1}^n GA_i^2 = n(R^2-OG^2)$;
b) $\sum_{i=1}^n GA_i \leq \sum_{i=1}^n GB_i$.
(G este definit prin relaţia $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$).

Vasile Pop

Soluţie.
a) $GA_i^2 = \overrightarrow{GA_i}^2 = (\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OG})^2 = \overrightarrow{OA_i}^2 - 2\cdot\overrightarrow{OA_i}\cdot\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}^2$, $i=\overline{1,n}$.
$\sum_{i=1}^n GA_i^2 = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i}^2 - 2\cdot\left(\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i}\right)\cdot\overrightarrow{OG}+\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OG}^2 =$
$= nR^2 - 2n\cdot\overrightarrow{OG}^2 + n\cdot\overrightarrow{OG}^2 = n(R^2-OG^2)$. .... **3 puncte**
b) Aplicând puterea punctului G faţă de cerc avem: $GA_i\cdot GB_i = R^2-OG^2$ .... **1 punct**
$GB_i = \dfrac{R^2-OG^2}{GA_i} \overset{a)}{=} \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sum_{i=1}^n GA_i^2}{GA_i}$, $i=\overline{1,n}$.
$\sum_{i=1}^n GB_i = \dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n GA_i^2\cdot\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{GA_i}$. .... **1 punct**
Inegalitatea de demonstrat devine: $\sum_{i=1}^n GA_i \leq \dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n GA_i^2\cdot\sum_{i=1}^n\dfrac{1}{GA_i}$.
Notăm $x_i = GA_i,\ i=1,2,\cdots,n$. Pe baza inegalităţii lui Cebâşev, obţinem

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2\cdot\frac{1}{x_i} \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\right),$$

ce trebuia demonstrat. .... **2 puncte**

Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ediţia a XX-a, Braşov 2019

Clasa a X-a - Soluţii şi Bareme

X 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$2019^{\sin^2 x\left(1+\cos^2 x\right)} - 2019^{\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)} = 2018 \cdot \cos 2x.$$

Traian Tămâian

Soluţie.
Ecuaţia se scrie echivalent

$$2019^{\left(1-\cos^2 x\right)\left(1+\cos^2 x\right)} - 2019^{\left(1-\sin^2 x\right)\left(1+\sin^2 x\right)} = 2018 \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cdot \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$$

.... **1 punct**

$$2019^{1-\cos^4 x} - 2019^{1-\sin^4 x} = 2018 \cdot \left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)$$

.... **1 punct**

$$2019^{1-\cos^4 x} + 2018 \cdot \left(1 - \cos^4 x\right) = 2019^{1-\sin^4 x} + 2018 \cdot \left(1 - \sin^4 x\right)$$

.... **1 punct**
Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2019^t + 2018 \cdot t$ este strict crescătoare şi deci este injectivă. .... **1 punct**
Ecuaţia devine $f\left(1 - \cos^4 x\right) = f\left(1 - \sin^4 x\right)$. .... **1 punct**
Cum funcţia f este injectivă se obţine $1 - \cos^4 x = 1 - \sin^4 x \iff \cos^4 x - \sin^4 x = 0 \iff \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cdot \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 0$ .... **1 punct**
$\cos 2x = 0 \iff x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Mulţimea soluţiilor este $S = \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\}$. .... **1 punct**

X 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural şi z_1, z_2, ..., z_n numere complexe, distincte două câte două, cu $|z_1| = |z_2| = ... = |z_n| = 1$. Dacă $|z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n| = n$, să se calculeze $|z_1 + z_2 + ... + z_n|$.

Aurel Bârsan

Soluţie.
Din ipoteză rezultă $|z_1^n + z_2^n + ... + z_n^n| = |z_1^n| + |z_2^n| + ... + |z_n^n|$ .... **1 punct**

de unde avem $z_i^n = \lambda_i \cdot z_1^n$, $\lambda_i \geq 0$, $\forall i \in \{2, 3, ..., n\}$ .... **2 puncte**
Trecând la modul, obţinem $\lambda_i = 1$, $\forall i \in \{2, 3, ..., n\}$. Deci $z_1^n = z_2^n = ... = z_n^n = z$. .... **1 punct**
Prin urmare z_1, z_2, ..., z_n sunt rădăcinile de ordin n ale lui $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, adică $\{z_1, z_2, ..., z_n\} = \left\{z_0, z_0 \cdot \varepsilon, z_0 \cdot \varepsilon^2, ..., z_0 \cdot \varepsilon^{n-1}\right\}$, unde $z_0 = \cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}$ şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$. .... **2 puncte**
$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|z_0 \sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k\right| = \left|z_0 \cdot \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1}\right| = 0$. .... **1 punct**

X 3. Să se determine numărul tripletelor $(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ pentru care

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{z} = \frac{\pi}{4}.$$

Vasile Pop

Soluţie.
Fie $(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, cu $1 \leq x \leq y \leq z$, un triplet care satisface relaţia din enunţ.
Avem $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \geq \operatorname{arctg}\frac{1}{y} \geq \operatorname{arctg}\frac{1}{z}$, deci
$\frac{\pi}{4} \leq 3 \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \iff \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \geq \frac{\pi}{12} \iff \frac{1}{x} \geq \operatorname{tg}\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$. .... **2 puncte**
Aşadar $x \leq 2 + \sqrt{3} < 4$ de unde $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. .... **1 punct**
Dacă $x = 1$ atunci ecuaţia devine $\operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{z} = 0$ şi nu avem soluţii. .... **1 punct**
Pentru $x \in \{2, 3\}$ aplicăm funcţia tangentă în egalitatea $\operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{z} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ şi obţinem
$\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{yz}} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \iff \frac{y+z}{yz-1} = \frac{x-1}{x+1}$ .... **1 punct**
Pentru $x = 2$ obţinem relaţia $(y-3)(z-3) = 10$ cu soluţia $y = 4$, $z = 13$ sau $y = 5$, $z = 8$.
Pentru $x = 3$ obţinem relaţia $(y-2)(z-2) = 5$ cu soluţia $y = 3$, $z = 7$. .... **1 punct**
Am obţinut soluţiile $(2, 4, 13)$, $(2, 5, 8)$, $(3, 3, 7)$ şi permutările lor, în total 15 soluţii. .... **1 punct**

X 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că imaginea oricărui interval închis I este un interval închis J iar raportul dintre lungimea lui J şi lungimea lui I este o constantă $a > 0$.

Vasile Pop

Soluţie.
Fie $I = [x, y]$, $x < y$ şi $f(I) = J = [u, v]$.
Avem $|f(x) - f(y)| \leq v - u = a(y - x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .... **1 punct**
Fie $x_1, y_1 \in [x, y]$ astfel ca $f(x_1) = u$ şi $f(y_1) = v$, atunci $v - u = a(y - x) = f(y_1) - f(x_1) \leq a|y_1 - x_1| \leq a(y - x) = v - u$. De unde avem $\{x, y\} = \{x_1, y_1\}$, adică $f(x) = u$ şi $f(y) = v$ sau $f(x) = v$ şi $f(y) = u$. De aici obţinem $|f(x) - f(y)| = a(y - x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, adică $f(x) - f(y) = a(y - x)$ sau $f(x) - f(y) = -a(y - x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. .... **1 punct**
Vom arăta că
$f(x) - f(y) = a(x - y) \forall x, y \in \mathbb{R}$ sau $f(x) - f(y) = -a(x - y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. .... **1 punct**
Presupunem prin absurd că ar exista $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y < z$ astfel ca $f(x) - f(y) = a(x - y)$ şi $f(y) - f(z) = -a(y - z)$. .... **1 punct**
Prin adunare obţinem $f(x) - f(z) = a(x - 2y + z)$. Dar $f(x) - f(z) = \pm a(x - z)$. ...... **1 punct**
De aici se obţine
$x - 2y + z = x - z$ sau $x - 2y + z = -x + z \iff y = z$ sau $x = y$, contradicţie. .... **1 punct**
Astfel că dacă $f(0) = b$ obţinem funcţiile $f_1(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $f_2(x) = -ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$. ... **1 punct**

Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ediţia a XX-a, Braşov 2019

Clasa a XI-a - Soluţii şi Bareme

XI 1. Fie k un număr întreg nenul. Considerăm o matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ având proprietăţile

$$\det(A) = k^2, \quad \det(A^2 - k \cdot A + k^2 \cdot I_3) = 0.$$

a) Arătaţi că numărul $n = 2 \cdot \det(A + I_3) + 2019 \cdot \det(A - I_3) - 3$ este un întreg pătrat perfect.

b) Arătaţi că există $A \in M_3(\mathbb{Z})$ cu proprietăţile din enunţ.

Traian Tămâian

Soluţie.

a) Considerăm funcţia polinomială $f_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ asociată matricei A, definită prin
$f_A(x) = \det(A + xI_3) = x^3 + \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \det(A),\ x \in \mathbb{C}$.............................. **1 punct**
Din ipoteză, $f_A(0) = k^2$, $f_A(\epsilon k) \cdot f_A(\epsilon^2 k) = \det[(A + \epsilon k I_3)(A + \epsilon^2 k I_3)] = \det(A^2 - kA + k^2 I_3) = 0$, unde $\epsilon \neq 1$ este rădăcină de ordinul 3 a unităţii. Rezultă $f_A(\epsilon k) = 0$ sau $f_A(\epsilon^2 k) = 0$....... **1 punct**
Dacă $f_A(\epsilon k) = 0$, atunci $k^2 + k - \alpha k + \epsilon(\beta - \alpha k) = 0$, cu ϵ complex nereal şi k întreg nenul, conduce la $\beta = \alpha k$ şi $\alpha = k + 1$. Deci $\beta = k^2 + k$. .... **1 punct**
Dacă $f_A(\epsilon^2 k) = 0$, atunci $k^2 + k - \beta + \epsilon(-\beta + \alpha k) = 0$, cu ϵ complex nereal şi k întreg nenul, conduce la $\beta = \alpha k$, $\beta = k^2 + k$ şi $\alpha = k + 1$. .... **1 punct**
Obţinem $f_A(x) = x^3 + (k+1)x^2 + (k^2 + k)x + k^2$, de unde $\det(A + I_3) = f_A(1) = 2k^2 + 2k + 2$ şi $\det(A - I_3) = f_A(-1) = 0$. Numărul din enunţ este $n = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$, deci este pătrat perfect.. **1 punct**
b) O matrice cu proprietăţile din ipoteză este $A = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & k^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k^2 + k - 1 & 0 & -k^2 + k \end{pmatrix}$....... **2 puncte**

XI 2. Fie matricele $A \in M_m(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ şi funcţia

$$f : M_{m,n}(\mathbb{C}) \to M_{m,n}(\mathbb{C}), \quad f(X) = A \cdot X - X \cdot B.$$

Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) Funcţia f este injectivă.

b) Funcţia f este surjectivă.

c) Matricele A şi B nu au nicio valoare proprie comună.

Vasile Pop

Soluţie.

a) $\Rightarrow$ *b)*. Dacă funcţia f este injectivă, atunci ecuaţia matriceală $f(X) = O_{m,n}$ are ca soluţie unică matricea nulă. Interpretând această ecuaţie ca un sistem liniar omogen de mn ecuaţii cu mn necunoscute, rezultă că determinantul sistemului este nenul. Pentru orice matrice $Y \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, sistemul liniar echivalent cu $f(X) = Y$ are determinantul nenul (acelaşi cu al sistemului anterior), deci soluţie unică. Prin urmare funcţia f este surjectivă. .... **1 punct**
b) $\Rightarrow$ *a)*. Dacă funcţia f este surjectivă, atunci sistemul liniar de mn ecuaţii cu mn necunoscute obţinut din $f(X) = Y$ are soluţie pentru orice $Y \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Presupunem că rangul matricei

sistemului $M = (m_{ij})_{i,j=\overline{1,mn}}$ nu este maxim. Din compatibilitatea sistemului, avem toţi minorii caracteristici nuli. Pentru un minor principal $m = \begin{vmatrix} m_{i_1j_1} & ... & m_{i_1j_r} \\ ... & ... & ... \\ m_{i_rj_1} & ... & m_{i_rj_r} \end{vmatrix}$, determinantul caracteristic nul $\Delta_c = \begin{vmatrix} m_{i_1j_1} & ... & m_{i_1j_r} & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ m_{i_rj_1} & ... & m_{i_rj_r} & 0 \\ m_{i_kj_1} & ... & m_{i_kj_r} & 1 \end{vmatrix}$ implică $m = 0$, contradicţie cu alegerea minorului principal.

Rezultă $\det(M) \neq 0$, deci ecuaţia $f(X) = O_{m,n}$ are soluţie unică. .... **1 punct**

Fie $X_1, X_2 \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $f(X_1) = f(X_2)$. Ultima relaţie este echivalentă cu $A(X_1 - X_2) - (X_1 - X_2)B = O_{m,n}$, deci cu $f(X_1 - X_2) = O_{m,n}$, despre care ştim că are soluţie unică, soluţia banală. Obţinem $X_1 = X_2$, prin urmare f este injectivă. .... **1 punct**

$a) \Rightarrow c)$. Presupunem că matricele A şi B au o valoare proprie comună. Există $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încât $\det(A - \lambda I_m) = 0$ şi $\det(B - \lambda I_n) = 0$. Are loc şi $\det(B^t - \lambda I_n) = 0$, deci λ este valoare proprie şi pentru transpusa matricei B. Fie $U \in M_{m,1}(\mathbb{C})^*$, $V \in M_{n,1}(\mathbb{C})^*$ doi vectori proprii corespunzători valorii proprii λ, pentru A, respectiv B^t: $AU = \lambda U$, $B^tV = \lambda V$. Atunci matricea nenulă $C = UV^t \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ verifică $f(C) = O_{m,n}$, ceea ce contrazice f injectivă. .... **2 puncte**

$c) \Rightarrow a)$. Presupunem prin absurd că f nu este injectivă. Există $C \in M_{m,n}$, nenulă, astfel încât $f(C) = O_{m,n}$, ceea ce este echivalent cu $AC = CB$. Prin inducţie matematică obţinem $A^kC = B^kC$, pentru orice k întreg nenegativ. Deci $P(A) \cdot C = C \cdot P(B)$, pentru orice funcţie polinomială P cu coeficienţi complecşi. .... **1 punct**

Considerăm polinomul caracteristic P_A al matricei A. Deoarece nicio valoare proprie a matricei A nu este valoare proprie a matricei B, rezultă că $\det(B - \lambda I_n) \neq 0$ pentru orice λ valoare proprie a lui A. De aici, matricea $P_A(B)$ este inversabilă. Din Teorema Cayley-Hamilton, $P_A(A) = O_{m,n}$. Considerând $P = P_A$ în relaţia $P(A)C = CP(B)$, egalitatea matriceală $CP_A(B) = O_{m,n}$ implică $C = O_{m,n}$, ceea ce contrazice alegerea matricei C. Rezultă f injectivă. .... **1 punct**

XI 3. Considerăm p numere naturale $a_1, a_2, \cdots, a_p$, unde $p \geq 2$. Arătaţi că mulţimea

$$\left\{ n \in \mathbb{N} | \sqrt[p]{(n + a_1)(n + a_2) \cdots (n + a_p)} \in \mathbb{N} \right\}$$

este infinită dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_p$.

Nicolae Bourbăcuţ

Soluţie.

Notăm $A = \left\{ n \in \mathbb{N} | \sqrt[p]{(n + a_1)(n + a_2) \cdots (n + a_p)} \in \mathbb{N} \right\}$

Dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_p$ atunci $A = \mathbb{N}$, deci A este o mulţime infinită. .... **1 punct**

Presupunem că mulţimea A este infinită. Definim în mod recurent şirul de numere naturale $(n_k)_{k \geq 0}$ prin $n_0 = \min A$ şi $n_{k+1} = \min (A \setminus \{n_0, \cdots, n_k\})$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Atunci $n_k < n_{k+1}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, iar $A = \{n_k | \ k \in \mathbb{N}\}$. Din $n_k \geq k$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ (inducţie), deducem $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = \infty$. .... **1 punct**

Avem $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[p]{(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_p)} - x \right) = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_p}{p}$. .... **2 puncte**

Rezultă $\lim\limits_{k \to \infty} \left(\sqrt[p]{(n_k + a_1)(n_k + a_2) \cdots (n_k + a_p)} - n_k \right) = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_p}{p}$, deci şirul de numere naturale $(z_k)_{k \geq 0}$, $z_k = \sqrt[p]{(n_k + a_1)(n_k + a_2) \cdots (n_k + a_p)} - n_k$ $(k \in \mathbb{N})$, este convergent. ... **1 punct**

Ca urmare, $L := \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_p}{p} \in \mathbb{N}$ şi există $r \in \mathbb{N}$ astfel ca $z_k = L$, $\forall\ k \geq r$. .... **1 punct**

Rezultă că ecuaţia polinomială $(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_p)=(x+L)^p$ admite o infinitate de radăcini, de unde deducem $a_1=a_2=\cdots=a_p=L$. .... **1 punct**

XI 4. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă.

a) Demonstraţi că dacă nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ atunci f are cel puţin un punct de extrem local în fiecare din intervalele (a,∞), cu $a\geq 0$.

b) Este adevărată reciproca proprietăţii de la a)?

Dorel Miheţ

Soluţie.

a) Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care nu există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $a\geq 0$ astfel încât f nu admite puncte de extrem în intervalul (a,∞). ... **1 punct**
Arătăm că f este injectivă pe (a,∞). Presupunem, prin reducere la absurd, că există $u,v>a$, cu $u<v$, astfel încât $f(u)=f(v)$. Dacă f este constantă pe $[u,v]$, atunci orice punct din (u,v) este punct de extrem local pentru f; contradicţie. Dacă f nu este constantă pe $[u,v]$ atunci, conform teoremei lui Weierstrass, există $x_1,x_2\in[u,v]$, astfel ca $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$, $\forall\ x\in[u,v]$, iar cel puţin unul din punctele x_1 şi x_2 este situat în interiorul intervalului $[u,v]$, deci este punct de extrem local pentru f; contradicţie. Aşadar f este injectivă pe (a,∞). .... **3 puncte**
Atunci funcţia continuă f este strict monotonă pe (a,∞), deci există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, în contradicţie cu ipoteza. Rezultă că f are cel puţin un punct de extrem local în (a,∞), $\forall\ a\geq 0$. .... **1 punct**

b) Reciproca nu este adevărată. De exemplu, funcţia continuă $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$, are ca puncte de minim local numerele $k\pi, k\in\mathbb{N}^*$ şi are limita 0 la infinit. .... **2 puncte**

Concursul naţional de matematică *Laurenţiu Duican*, Ediţia a XX-a, Braşov 2019

Clasa a XII-a - Soluţii şi Bareme

XII 1. Pe mulţimea $G=(0,\infty)$ se defineşte operaţia "$\circ$" în descrisă de relaţia:

$$a^x + a^{x\circ y} + a^y = 2 + a^{x+y},\ \text{pentru orice } x,y\in G,$$

unde $a>1$.

a) Demonstraţi că $(G,\circ)$ este un grup abelian.

b) Fie $x_k\in G,\ k=1,2,\ldots,n$. Arătaţi că

$$\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{a^{x_i\circ x_j}-1} \le \frac{n-1}{2}\sum_{k=1}^{n} a^{x_k}.$$

Mihàily Bencze

Soluţie.
a) Soluţia 1.
$x\circ y = \log_a(1+(a^x-1)(a^y-1))>0$, $x,y\in G$ .... **1 punct**
Asociativitatea: $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) = \log_a(1+(a^x-1)(a^y-1)(a^z-1))$
$x,y,z\in G$ .... **1 punct**
Comutativitatea şi elementul neutru $e=\log_a 2\in G$ .... **1 punct**
Inversul elementului $x\in G$ este $x^{-1}=\log_a\frac{a^x}{a^x-1}\in G$ .... **1 punct**
Soluţia 2.
$x\circ y = \log_a(1+(a^x-1)(a^y-1))>0$, $x,y\in G$ .... **1 punct**
Funcţia $\psi: G\to G$, $\psi(x)=a^x-1$, $x\in G$ este o bijecţie şi $\Psi^{-1}(x)=\log_a(1+x)$, $x\in G$. ... **1 punct**
$\Psi(x\circ y)=\Psi(x)\cdot\Psi(y)$, $x.y\in G$. .... **1 punct**
Deoarece $(G,\cdot)$ este grup abelian iar $(G,\circ)$ este izomorf cu $(G,\cdot)$, este şi el grup abelian. ... **1 punct**
b) Inegalitatea este echivalentă cu

$$\sum_{1\le i<j\le n}\sqrt{(a^{x_i}-1)(a^{x_j}-1)} \le \frac{n-1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a^{x_k}-1).$$

.... **1 punct**
Inegalitatea este echivalentă cu

$$\sum_{1\le i<j\le n}\left(\sqrt{a^{x_i}-1}-\sqrt{a^{x_j}-1}\right)^2 \ge 0.$$

.... **2 puncte**

XII 2. Fie $(A,+,\cdot)$ inel cu unitate. Dacă mulţimea $N=\{x\in A|\ xy\neq 0, \forall y\in A^\star\}$ este finită, demonstraţi că $(N,\cdot)$ este grup. (Notaţie: $A^\star = A\setminus\{0\}$.)

Nicolae Bourbăcuţ

Soluţie.
Este suficient să demonstrăm că elementele din N sunt inversabile .... **1 punct**
Demonstrăm că dacă $x\in N$, atunci $x^n\in N$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^\star$. Presupunem prin absurd că există $n\in\mathbb{N}^\star$, astfel ca $x^n\notin N$. Deci există $y\in A^\star$, astfel ca $x^n y=0$.
.... **1 puncte**
Cum $x\in N$, rezultă $x^{n-1}y=0$ .... **1 punct**
Continuăm prin inducţie şi obţinem $xy=0$. Contradicţie. .... **1 punct**
$x^n\in N,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^\star$, şi N finită implică $\exists\ p,q\in\mathbb{N}:\ x^{p+q}=x^p$. .... **1 punct**

Obţinem $x^p(x^q-1)=0$. Cum $x^p \in N$, rezultă $x^q-1=0$. .... **1 punct**
Atunci $xx^{q-1}=1$, $x^{q-1}x=1$. Deci x^{q-1} este inversul lui x. .... **1 punct**

XII 3. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{n^6+k^3}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n}.$$

Traian Tămâian

Soluţie.
$\sum_{k=1}^n \cos\frac{2k\pi}{n}=0$. .... **1 punct**
$\sum_{k=1}^n \sqrt[3]{n^6+k^3}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^n(\sqrt[3]{n^6+k^3}-n^2)\cos\frac{2k\pi}{n}=$
$\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{(\sqrt[3]{n^6+k^3})^2+n^2\sqrt[3]{n^6+k^3}+n^4}\cos\frac{2k\pi}{n}$. .... **2 puncte**
Notăm $T_k(n)=\frac{n^4}{(\sqrt[3]{n^6+k^3})^2+n^2\sqrt[3]{n^6+k^3}+n^4}$. Avem
$T_n(n)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^3\cos\frac{2k\pi}{n}\le\sum_{k=1}^n\sqrt[3]{n^6+k^3}\cos\frac{2k\pi}{n}\le T_1(n)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^3\cos\frac{2k\pi}{n}$.
.... **1 punct**
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^3\cos\frac{2k\pi}{n}=\int_0^1 x^3\cos 2\pi x dx$. .... **1 punct**
$\int_0^1 x^3\cos 2\pi x dx=\frac{3}{4\pi^2}$. .... **1 punct**
$\lim_{n\to\infty}T_1(n)=\frac{1}{3}$ şi $\lim_{n\to\infty}T_n(n)=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\sqrt[3]{n^6+k^3}\cos\frac{2k\pi}{n}=\frac{1}{4\pi^2}$. .... **1 punct**

XII 4. Fie a un număr real strict pozitiv.

a) Determinaţi funcţiile $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$, integrabile pe intervalele compacte incluse în $[0,\infty)$, care satisfac relaţia
$$\int_0^x f(t)\,dt+1=\frac{1}{f^a(x)},\ \text{pentru oricare } x\ge 0.$$

b) Demonstraţi că pentru oricare număr natural nenul n are loc inegalitatea
$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^{\frac{1}{a+1}}}>\frac{a+1}{a}\left((n+1)^{\frac{a}{a+1}}-1\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{a+1}}}\right).$$

Eugen Păltănea

Soluţie.
a) Fie $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcţie cu proprietăţile din enunţ. $f(0)=1$ .... **1 punct**
Funcţia $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, este continuă şi pozitivă, deci f este continuă. Atunci F este o primitivă a lui f, iar f este derivabilă. .... **1 punct**
Prin derivarea relaţiei obţinem $f=-a\cdot f^{-(a+1)}\cdot f'$. .... **1 punct**
Rezultă $\left(f^{-(a+1)}\right)'=\dfrac{a+1}{a}$, deci există $b\in\mathbb{R}$ astfel ca $f^{-(a+1)}(x)=\dfrac{a+1}{a}x+b$, $\forall\ x\ge 0$. Cum $b=f^{-(a+1)}(0)=1$, obţinem $f(x)=\left(\dfrac{a+1}{a}x+1\right)^{-\frac{1}{a+1}}$, $x\ge 0$. .... **1 punct**
b) Funcţia f determinată la a) este strict convexă pe $[0,\infty)$. .... **1 punct**
Atunci, pentru $n\in\mathbb{N}^*$, avem

$$(n+1)^{\frac{a}{a+1}}-1=\frac{1}{f^a\left(\frac{an}{a+1}\right)}-1=\int_0^{\frac{an}{a+1}}f(t)\,dt=\sum_{k=1}^n\int_{\frac{a(k-1)}{a+1}}^{\frac{ak}{a+1}}f(t)\,dt<$$

$$<\frac{a}{a+1}\sum_{k=1}^n\frac{f\left(\frac{a(k-1)}{a+1}\right)+f\left(\frac{ak}{a+1}\right)}{2}=\frac{a}{a+1}\left(\frac{1}{2(n+1)^{\frac{1}{a+1}}}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^{\frac{1}{a+1}}}\right),$$

de unde rezultă inegalitatea din enunţ. .... **2 puncte**